《概率论与数理统计》期末试卷

2022/2023 学年第一学期 院系______________

学号________________姓名____________ 考试成绩_________

题号	一40分	二10分	三15分	四20分	五10分	六5分	总分
得分							

$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, t_{0.025}(15) = 2.132, t_{0.025}(16) = 2.120$

一. 简答题(8×5分）

1. 在(0,1)上任取两数，求两数之积小于0.5的概率。

2.设X为随机变量，服从$(-1,1)$上的均匀分布，求$Y = X^2$的概率密度函数。

3. 设随机变量X,Y的相关系数为0.5，$DX = 9, DY = 16$，求$cov(X,Y)$

4. 设计算机进行加法运算时，误差相互独立，均服从$(-0.5, 0.5)$的均匀分布。若将1200个数相加，求误差总和的绝对值大于15的概率。

5. 设总体$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，其中$\sigma_0$是已知常数。$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X$的简单随机样本，样本均值记为$\overline{X}$，试写出总体均值$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间？

二. (10 分) 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y) & 0<x<1, 0<y<1-x^2 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

试求：(1).k；(2).$P(0<X<\frac{1}{3})$。

三. (15 分) 设总体X服从正态分布$N(1,4)$，总体Y服从正态分布$N(1,2)$，而$X_1,X_2,\cdots,X_4$及Y_1,Y_2分别来自总体X,Y的简单随机样本，且相互独立。它们的样本均值记为$\overline{X},\overline{Y}$，样本方差记为$S_1^2,S_2^2$。

(1).若$c_1(\overline{X}-\overline{Y})\sim N(0,1)$,求$c_1$;

(2).若$c_2S_1^2\sim\chi^2(n)$,求c_2,n;

(3).求$\frac{2(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{\frac{3}{2}S_1^2+S_2^2}}$的分布。

四. (20 分) 设随机变量X的密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)} & x>1\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

其中未知参数$\theta>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的简单随机样本，求θ的矩估计和极大似然估计。

五. (10 分) 设某厂生产的灯泡寿命服从正态分布，从中抽取16个灯泡,测得样本均值$\overline{X}$为940小时,样本标准差S为120小时.试在显著性水平$\alpha = 0.05$下检验整批灯泡的寿命是否为1000小时?

六. (5分) 设一块放射性物质在一段时间所放射出的粒子数X服从参数为λ的泊松分布.但由于仪器的原因,并非每一粒放射出的粒子都被记录下来.现在知道每粒粒子被记录下来的概率为p,且每粒粒子能否被记录下来的事件相互独立.求这块射性物质在一段时间内被记录下来的粒子数Y的分布.

南京大学数学课程试卷

2023/2024 学年第 一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论与数理统计(A 卷)

考试时间 **2024.1.2** 系别 ________ 学号 ________ 姓名 ________

题号	一 30	二 10	三 14	四 13	五 8	六 15	七 10	合计
得分								

$\Phi(1)=0.8413$， $\Phi(1.28)=0.90$， $\Phi(1.5)=0.9332$， $\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$ ，
$\Phi(2)=0.9772$， $\Phi(2.33)=0.99$， $t_{0.025}(25)=2.0595$， $t_{0.05}(25)=1.7081$，
$t_{0.025}(24)=2.0639$， $t_{0.05}(24)=1.7109$， $\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，
$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.1}(23)=32$

一、计算题（共 **30** 分，每题 **5** 分）

1. 设每个人的血清中含肝炎病毒的概率为 **0.4%**，求来自不同地区的 **100** 人的血清混合液中含有肝炎病毒的概率。

2. 某加油站的油库每周需油量 $X(kg)$ 服从 $N(500,50^2)$，为使该加油站无油可售的概率小于 **0.01**，这个加油站的油库容量起码应多大？

3. 甲乙两人进行兵乒球对抗赛，每局比赛中甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$，采取 **5** 局 **3** 胜制（即 **5** 局内谁先赢 **3** 局就算胜出并停止比赛），求甲最终获胜的概率。

4. 已知随机变量 X 在区间 $[2,5]$ 上均匀取值，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观察值大于 **3** 的概率。

5. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim U(0,1)$，$Z \sim b(5,0.5)$，且 X、Y、Z 相互独立，求随机变量 $W=(2X+3Y)(4Z-1)$ 的数学期望。

6. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知样本容量 $n=24,$ 样本方差 $s^2=12.5227,$ 求 $P\{\sigma^2>9\}$。

二、（10 分）高射炮向敌机发射三发炮弹，每弹击中与否相互独立，且每发炮弹击中的概率均为 0.3，又知敌机若中一弹，坠毁的概率为 0.2，若中两弹，坠毁的概率为 0.6，若中三弹，敌机必坠毁。(1)求敌机坠毁的概率； (2)若敌机坠毁，求它被击中两弹的概率。

三、（14 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ce^{-|x|}$, $-\infty<x<+\infty$，其中常数 $c>0$， 求：

（1）常数 c；（2）X 的分布函数；

（3）X 的数学期望与方差；（4）X 与 $Y=|X|$ 的协方差。

四、（13 分）设二维随机变量(X,Y)的分布函数是

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3}),\qquad (x,y)\in R^2,$$

试求：（1） 常数A、B、C；（2）求$P(0<X\le 2,0<Y\le 3)$；

（3）X和Y边缘分布函数；（4） X和Y是否相互独立？

五、（8 分）假设生产线组装每件成品的时间 X 服从指数分布，统计资料表明该生产线每件成品的组装时间平均为 10 分钟，各件产品的组装时间相互独立。

（1）求组装一件产品至少需要 5 分钟的概率；（2）求组装 100 件成品需要 15 到 20 小时的概率。

六、（15 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3} & 0<x<\theta \\ 0 & others\end{cases},$$

$X_1,\ldots,X_n$ **为取自总体的样本,**

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；(2) 判断 $\hat{\theta}_M$ 的无偏性；(3)求 θ 的极大似然估计量。

七、(10 分) 一台机床加工轴的椭圆度 X（单位：**mm**）服从正态分布 $N(0.095, 0.02^2)$。机床经调整后随机取 **25** 根测量其椭圆度，算得 $\bar{x} = 0.088$。已知总体方差不变，

(1) 问调整后机床加工轴的椭圆度的均值有无显著降低（α=0.05）？

(2) 问 n 取多少才能使由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构成的参数 μ 的 **95%**置信区间的长度小于 **0.01**？

《概率论与数理统计》期末试卷

2022/2023 学年第一学期　院系________________

学号__________________姓名______________ 考试成绩__________

题号	一40分	二10分	三15分	四20分	五10分	六5分	总分
得分							

$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, t_{0.025}(15) = 2.132, t_{0.025}(16) = 2.120$

一. 简答题(8×5分）

1. 在(0,1)上任取两数，求两数之积小于0.5的概率。

解：$P = 1 - \int\limits_{0.5}^{1} dx \int\limits_{1/2x}^{1} dy = 0.5 + 0.5 \ln 2$

2.设X为随机变量，服从$(-1,1)$上的均匀分布，求$Y = X^2$的概率密度函数。

解：

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 < y \le 1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

3. 设随机变量X, Y的相关系数为0.5，$DX = 9, DY = 16$，求$cov(X, Y)$

解：$cov(X, Y) = \sqrt{DXDY}\rho_{XY} = 6$

4. 设计算机进行加法运算时，误差相互独立，均服从$(-0.5, 0.5)$的均匀分布。若将1200个数相加，求误差总和的绝对值大于15的概率。

解：$P(|\sum\limits_{i=1}^{1200} X_i| > 15) = P(|\frac{\sum\limits_{i=1}^{1200} X_i - 0}{100}| > \frac{15-0}{100}) = 2(1-\Phi(1.5)) = 0.1336$。

5. 设总体$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，其中$\sigma_0$是已知常数。$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X$的简单随机样本，样本均值记为$\overline{X}$，试写出总体均值$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间？

解：$[\overline{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}]$。

二. (10 分) 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1-x^2 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

试求：(1).k；(2).$P(0 < X < \frac{1}{3})$。

解：1).$k = \frac{5}{2}$;

2).$P(0 < X < \frac{1}{3}) = \int\limits_0^{1/3} dx \int\limits_0^{1-x^2} \frac{5}{2}(x^2+y)dy = \frac{101}{243}$

三. (15 分) 设总体X服从正态分布$N(1,4)$，总体Y服从正态分布$N(1,2)$，而$X_1,X_2,\cdots,X_4$及Y_1,Y_2分别来自总体X,Y的简单随机样本，且相互独立。它们的样本均值记为$\overline{X},\overline{Y}$，样本方差记为$S_1^2,S_2^2$。

(1).若$c_1(\overline{X}-\overline{Y})\sim N(0,1)$,求$c_1$;

(2).若$c_2S_1^2\sim\chi^2(n)$,求c_2,n;

(3).求$\frac{2(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{\frac{3}{2}S_1^2+S_2^2}}$的分布。

解：

$$c_1=\frac{\sqrt{2}}{2},c_2=\frac{3}{4},n=3$$

$$\frac{2(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{\frac{3}{2}S_1^2+S_2^2}}=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})/\sqrt{2}}{\sqrt{[\frac{3}{4}S_1^2+\frac{1}{2}S_2^2]/4}}\sim t(4)$$

四. (20 分) 设随机变量X的密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)} & x>1\\ 0 & 其它。\end{cases}$$

其中未知参数$\theta>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的简单随机样本，求θ的矩估计和极大似然估计。

解：

$$EX=\int_1^{+\infty}xp(x)dx=\frac{\theta}{\theta-1}$$

$$\theta=\frac{EX}{EX-1}$$

$$\widehat{\theta}_1=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^n\ln X_i$$

$$\widehat{\theta}_2=\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln X_i}$$

五. (10 分) 设某厂生产的灯泡寿命服从正态分布，从中抽取16个灯泡,测得样本均值$\overline{X}$为940小时,样本标准差S为120小时.试在显著性水平$\alpha = 0.05$下检验整批灯泡的寿命是否为1000小时?

解：$T = \frac{|\overline{X}-1000|}{S/\sqrt{16}} = 2 < t_{0.025}(15) = 2.132$ 是1000小时。

六. (5分) 设一块放射性物质在一段时间所放射出的粒子数X服从参数为λ的泊松分布.但由于仪器的原因,并非每一粒放射出的粒子都被记录下来.现在知道每粒粒子被记录下来的概率为p,且每粒粒子能否被记录下来的事件相互独立.求这块射性物质在一段时间内被记录下来的粒子数Y的分布.

解：$Y \sim P(p\lambda)$

南京大学数学课程试卷

2023/2024 学年第 一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论与数理统计(A 卷)

考试时间 2024.1.2 系别 ______________ 学号 ____________ 姓名____________

题号	一 30	二 10	三 14	四 13	五 8	六 15	七 10	合计
得分								

$\Phi(1)=0.8413$， $\Phi(1.28)=0.90$， $\Phi(1.5)=0.9332$， $\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$ ，$\Phi(2)=0.9772$， $\Phi(2.33)=0.99$，$t_{0.025}(25)=2.0595$, $t_{0.05}(25)=1.7081$，
$t_{0.025}(24)=2.0639$, $t_{0.05}(24)=1.7109$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，
$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$, $\chi^2_{0.1}(23)=32$

一、计算题（共 30 分，每题 5 分）

1. 设每个人的血清中含肝炎病毒的概率为 0.4%，求来自不同地区的 100 人的血清混合液中含有肝炎病毒的概率。

解：令 A 表示这 100 人的血清混合液中含有肝炎病毒，A_i 表示第 i 个人的血清中含有肝炎病毒，

$i=1,2,\cdots,n$，由题意 $A_1,A_2,\cdots,A_{100}$ 相互独立，于是 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100}$，从而

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100})=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100}})=1-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{100}})$$

$$1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{100}})=1-(1-0.004)^{100}$$ **…………5 分**

2. 某加油站的油库每周需油量 $X(kg)$ 服从 $N(500,50^2)$，为使该加油站无油可售的概率小于 0.01，这个加油站的油库容量起码应多大？

解：设这个站油库容量为 $h(kg)$ 时能满足题目要求，则 $P(X>h)<0.01$，即

$P(X\le h)=\Phi(\frac{h-500}{50})\ge 0.99$，而 $\Phi(2.33)=0.99$，故 $\frac{h-500}{50}\ge 2.33$，所以

$h\ge 616.5$。 **…………5 分**

3. 甲乙两人进行乒乓球对抗赛，每局比赛中甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$，采取 5 局 3 胜制（即 5 局内谁先赢 3 局就算胜出并停止比赛），求甲最终获胜的概率。

解：令 A 表示比赛完 3 局甲才获胜，B 表示比赛完 4 局甲才获胜，C 表示比赛完 5 局甲才获胜，D 表示甲最终获胜，于是 $D=A\cup B\cup C$，且 A、B、C 两两互不相容，所以

$P(D)=P(A)+P(B)+P(C)$，又

$P(A)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，$P(B)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$，$P(C)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$，

$P(D)=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$。 **…………5** 分

4. 已知随机变量 X 在区间 $[2,5]$ 上均匀取值，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观察值大于 **3** 的概率。

解：X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 2\le x\le 5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，令 Y 表示 **3** 次观察中观察值大于 **3** 的次数，则

$Y\sim b(3,p)$，$p=P(X>3)=\frac{5-3}{5-2}=\frac{2}{3}$，从而所求概率为

$P(Y>3)=P(Y=2)+P(Y=3)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$

…………5 分

5. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim U(0,1)$，$Z\sim b(5,0.5)$，且 X、Y、Z 相互独立，求随机变量 $W=(2X+3Y)(4Z-1)$ 的数学期望。

解：$E(X)=0$，$E(Y)=0.5$，$E(Z)=5\times 0.5=2.5$，因为 $2X+3Y$ 与 $4Z-1$ 相互独立，于是

$E(W)=E[(2X+3Y)(4Z-1)]=E[2X+3Y]E[4Z-1]=[2E(X)+3E(Y)][4E(Z)-1]=\frac{27}{2}$

…………5 分

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，已知样本容量 $n=24,$ 样本方差 $s^2=12.5227,$ 求 $P\{\sigma^2>9\}$。

证明：由抽样分布定理 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$n=24,$ 有 $\chi^2=\frac{23S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(23)$

故 $P\{\sigma^2>9\}=P\{\frac{23S^2}{\sigma^2}<\frac{23S^2}{9}\}=P\{\chi^2<\frac{23S^2}{9}\}$

$=P\{\chi^2<\frac{23\times 12.5227}{9}\}=P\{\chi^2<32\}=1-P\{\chi^2\ge 32\}$

查表得 $\chi^2_{0.1}(23)=32$

故 $P\{\sigma^2 > 9\} = 1 - P\{\chi^2 \ge \chi^2_{0.1}(23)\} = 1 - 0.1 = 0.9$ …………5 分

二、（10 分）高射炮向敌机发射三发炮弹，每弹击中与否相互独立，且每发炮弹击中的概率均为 0.3，又知敌机若中一弹，坠毁的概率为 0.2，若中两弹，坠毁的概率为 0.6，若中三弹，敌机必坠毁。(1)求敌机坠毁的概率； (2)若敌机坠毁，求它被击中两弹的概率。

解：设 B 表示敌机坠毁，A_i 表示敌机中 i 发炮弹，C_i 表示第 i 发炮弹击中敌机，则

$$P(A_1) = P(C_1\bar{C}_2\bar{C}_3 \cup \bar{C}_1C_2\bar{C}_3 \cup \bar{C}_1\bar{C}_2C_3) = P(C_1\bar{C}_2\bar{C}_3) + P(\bar{C}_1C_2\bar{C}_3) + P(\bar{C}_1\bar{C}_2C_3)$$

$= 0.3\times0.7\times0.7 + 0.7\times0.3\times0.7+0.7\times0.7\times0.3=0.441$ …………1 分

$$P(A_2) = P(C_1C_2\bar{C}_3 \cup \bar{C}_1C_2C_3 \cup C_1\bar{C}_2C_3) = P(C_1C_2\bar{C}_3) + P(\bar{C}_1C_2C_3) + P(C_1\bar{C}_2C_3)$$

$= 0.3\times0.3\times0.7 + 0.7\times0.3\times0.3+0.3\times0.7\times0.3=0.189$ …………1 分

$P(A_3) = P(C_1C_2C_3) = = 0.3\times0.3\times0.3 = 0.027$ …………1 分

(1)敌机坠毁的概率为

$$P(B) = P(A_1)P(B\mid A_1) + P(A_2)P(B\mid A_2) + P(A_3)P(B\mid A_3)$$

$= 0.441\times0.2 + 0.189\times0.6 + 0.027\times1 = 0.2286$ …………4 分

(2) 所求概率为

$P(A_2\mid B) = \dfrac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)} = \dfrac{0.189\times0.6}{0.2286} = 0.496$ …………3 分

三、（14 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = ce^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$，其中常数 $c > 0$， 求：

（1）常数 c；（2） X 的分布函数；

（3） X 的数学期望与方差；（4） X 与 $Y = |X|$ 的协方差。

解：（1）由归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ce^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} ce^{-x}dx = 2c = 1$，故 $c = \dfrac{1}{2}$。

…………3 分

（2） $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-x} & x \ge 0 \\ \dfrac{1}{2}e^{x} & x < 0 \end{cases}$，所以 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

当 $x < 0$ 时，$F(x) = \dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^t dt = \dfrac{1}{2}e^x$， …………2 分

当 $x \ge 0$ 时，$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|t|}dt=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{t}dt+\int_{0}^{x} e^{-t}dt\right)=1-\frac{1}{2}e^{-x}$，　　**…………2 分**

故 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x \ge 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & x<0 \end{cases}$

（3）$E\left(X\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-|x|}dx=0,$　　**…………2 分**

$E\left(X^2\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-|x|}dx=\int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx=2,$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2$　　**…………2 分**

（4）$Cov(X,Y)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E(Y)=E(X\,|\,X\,|)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,|\,x\,|\,e^{-|x|}dx=0$

…………3 分

四、（13 分）设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数是

$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})$，　$(x,y)\in R^2$，

试求：（1） 常数 A、B、C；（2）求 $P(0<X\le 2,0<Y\le 3)$；

（3）X 和 Y 边缘分布函数；　（4）　X 和 Y 是否相互独立？

解：　(1) 由分布函数性质：

$$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$$

$$F(x,-\infty)=A(B+arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0$$

$$F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+arctan\frac{y}{2})=0$$

解得　　$A=\frac{1}{\pi^2}$，$B=C=\frac{\pi}{2}$；　　**…………4 分**

（2）$P(0<X\le 2,0<Y\le 3)=F(0,0)+F(2,3)-F(0,3)-F(2,0)=\frac{1}{16}$　**…………3 分**

(3)　$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})$，$x\in R$，　　**…………2 分**

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}),\ \ y\in R.$$ **…………2 分**

(4) $F\left(x,y\right)=F_X(x)F_Y(y)$,所以 X 和 Y 相互独立 **…………2 分**

五、 （8 分）假设生产线组装每件成品的时间 X 服从指数分布，统计资料表明该生产线每件成品的组装时间平均为 10 分钟，各件产品的组装时间相互独立。

（1）求组装一件产品至少需要 5 分钟的概率；（2）求组装 100 件成品需要 15 到 20 小时的概率。

解：（1） $E(X)=10$ ，则 X 服从参数为 0.1 的指数分布，故 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases},$$

则组装一件产品至少需要 5 分钟的概率 $P(X\ge 5)=0.1\int_5^{+\infty}e^{-0.1x}dx=e^{-0.5}$ **…………3 分**

（2）设组装第 i 件成品需要时间 X_i 分，则 $E(X_i)=10$，因为 X_i 服从指数分布，所以 $D(X_i)=10^2$，

$$P\{15\quad 60\quad \sum_{i=1}^{100}X_i\quad 20\quad 60\}=\Phi(\frac{20\quad 60\quad 100\quad 10}{\sqrt{100}\quad 10})-\Phi(\frac{15\quad 60-100\quad 10}{\sqrt{100}\quad 10})$$

$=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.9772+0.8413-1=0.8185$ **…………5 分**

六、（15 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3} & 0<x<\theta\\ 0 & others\end{cases},$$

$X_1,\ldots,X_n$ 为取自总体的样本,

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；**(2)** 判断 $\hat{\theta}_M$ 的无偏性；**(3)**求 θ 的极大似然估计量。

解：（1） $E(X)=\int_0^{\theta}x\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{3}{4}\theta$，令 $E(X)=\overline{X}$，得：$\hat{\theta}_M=\frac{4}{3}\overline{X}$. **…………3 分**

(2) $E\left(\hat{\theta}_M\right)=E\left(\frac{4}{3}\overline{X}\right)=\frac{4}{3}E\left(\overline{X}\right)=\frac{4}{3}E\left(X\right)=\theta$

故 $\hat{\theta}_M$ 是 θ 的无偏估计量。 **…………3 分**

（3）似然函数 $L\left(\theta;x_1,\ldots x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{3x_i^{\,2}}{\theta^3}=\frac{3^n}{\theta^{3n}}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\qquad 0<x_i<\theta$ …………2 分

取对数 $\ln L\left(\theta;x_1,\ldots x_n\right)=n\ln 3-3n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{\,2}\qquad 0<x_i<\theta$

列似然方程，令 $\frac{d\ln L\left(\theta;x_1,\ldots x_n\right)}{d\theta}=-\frac{3n}{\theta}=0$ 无解。 …………3 分

由于当 $0<x_i<\theta,i=1,\ldots,n$ 时，$L\left(\theta;x_1,\ldots x_n\right)=\frac{3^n}{\theta^{3n}}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\,2}$ 关于 θ 单减。

而 $0<x_i<\theta,i=1,\ldots,n$ 相当于 $\theta\ge\max\left(x_1,\ldots x_n\right)$，故当 $\theta=\max\left(x_1,\ldots x_n\right)$ 时

$L\left(\theta;x_1,\ldots x_n\right)=\frac{3^n}{\theta^{3n}}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\,2}$ 达到最大，θ 的极大似然估计量为

$\hat{\theta}=\max\left(X_1,\ldots X_n\right)$ …………4 分

七、**(10 分)** 一台机床加工轴的椭圆度 X（单位：**mm**）服从正态分布 $N(0.095,0.02^2)$。机床经调整后随机取 **25** 根测量其椭圆度，算得 $\bar{x}=0.088$。已知总体方差不变，

(1) 问调整后机床加工轴的椭圆度的均值有无显著降低（α=0.05）？

(2) 问 n 取多少才能使由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 构成的参数 μ 的 **95%**置信区间的长度小于 **0.01**？

解：**(1)** 给出原假设和备择假设：$H_0:\mu\ge\mu_0$=0.095，$H_1:\mu<\mu_0$=0.095 ……………2 分

当 H_0 真时，检验统计量为 $U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，检验的拒绝域为 $U\le-U_\alpha$，故

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{0.088-0.095}{0.02/\sqrt{25}}=-1.75<-U_{0.05}=-1.645$$ ……………2 分

落在拒绝域中，故拒绝 H_0，即认为调整后机床加工轴的椭圆度的均值有显著降低。……………1 分

(2) σ^2 已知，μ 的置信度 $1-\alpha$ 为置信区间为 $\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，……………1 分

故 μ 的 **95%**置信区间的长度为 $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\times0.02}{\sqrt{n}}U_{0.025}=\frac{0.04}{\sqrt{n}}\times1.96$， ……………2 分

令$\frac{0.04}{\sqrt{n}}\times 1.96 < 0.01 \Rightarrow n > 61.5$，故$n$=62 ……………**2 分**

极限理论

- 大数定律（定义及三个大数定律）

- 中心极限定理（定义及独立同分布的中心极限定理）

- **定理（ 切比雪夫大数定理）**：设随机变量序列$\{X_n\}$ 两两不相关，且存在常数C, 使得D(X_k)<C(k=1,2, …)，则$\{X_n\}$ 服从大数定律，即：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) \xrightarrow{P} 0$$

- **定理（辛钦大数定理）**：设随机变量序列 $\{X_n\}$ 相互独立同分布，且具有数学期望 $E(X_k)=\mu(k=1,2,\dots)$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \xrightarrow{P} \mu$$

- **定理（伯努里大数定理）**：　设n_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数。p是事件A在每次试验中发生的概率，则

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} p$$

- **定理：（切比雪夫不等式）**

设随机变量X的期望，方差存在，则$\forall \varepsilon > 0,$

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

- 例：设随机变量X和Y的数学期望分别为-2和2，方差为1和4。E[(X+2)(Y-2)]=-1，则根据切比雪夫不等式求概率P(|X+Y|≥6)的一个上界。
- 解：

Cov(X,Y)=E[(X+2)(Y-2)]=-1

$$P\left(\left|X+Y\right|\geq 6\right)=P(|X+Y-EX-EY|\geq 6)$$

$$\leq \frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{DX+DY+2Cov(X,Y)}{36}=\frac{1+4-2}{36}=1/12$$

- **定理（独立同分布的中心极限定理）**设$\{X_n\}$是一独立同分布随机变量序列，且具有相同的数学期望和方差，$E(X_k)=\mu$，$D(X_k)=\sigma^2(k=1,2,\ldots)$，则$\{X_n\}$服从**中心极限定理**，即

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

利用中心极限定理近似计算（考试重点）

- 例：用计算机做加法时，对每个加数依四舍五入取整．设所有取整的舍入误差是相互独立的，都服从[-0.5 ，0.5]上的均匀分布，（1）若有1200个数相加，则其误差总和的绝对值超过15的概率是多少？（2）最多可有多少个数相加，使得误差总和的绝对值小于10的概率达到90%以上？

标准化

- 解：

$$P(|\sum_{i=1}^{1200} X_i| \geq 15) = P(|\frac{\sum_{i=1}^{1200} X_i - 1200\times 0}{\sqrt{1200\times[0.5-(-0.5)]^2/12}}| \geq \frac{15}{\sqrt{100}})$$

$$\approx 2[1-\Phi(1.5)] = 2[1-0.9332] = 0.1336$$

$$P(|\sum_{i=1}^{n} X_i| \geq 10) = P(|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n\times[0.5-(-0.5)]^2/12}}| \geq \frac{10}{\sqrt{n/12}}) \approx 2[1-\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}})] = 0.9$$

$$\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}}) = 0.05 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{n/12}} = 1.645 \Rightarrow n = \frac{1200}{1.645^2} \approx 443.5 \Rightarrow n = 444$$

统计量及其抽样分布

- 三大分布： x^2分布；**t**分布；**F**分布（定义及性质）

- 正态总体的样本均值及样本方差的分布（一个重要的定理及其三个推论）。

- **定理：** 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，X_1，X_2，…，X_n为取自X的一个样本，$\bar{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差，则
- (1) $\bar{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$
- (2) $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
- (3) $\bar{X}$与S^2相互独立

- 例：设 X_1， X_2， …， X_{2n} 为取自 N(0， 1)的样本，

$$\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i,\text{求}Y=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2\text{的分布。}$$

- 解：

$$X_i+X_{n+i}\sim N(0,2),i=1,2\dots,n;$$

$$2\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})$$

$$Y=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$$

- 例：设 X_1，X_2，…，X_9 为取自 N(0, 2)的样本，求常数a, b, c, 使得

$$Z = a(X_1 + X_2 + 2X_3)^2 + b(X_4 + 4X_5 + X_6)^2 + c(X_7 + X_8 + X_9)^2$$

服从 χ^2 分布。并求其自由度。

- **解：**

$$X_1+X_2+2X_3 \sim N(0,12), X_4+4X_5+X_6 \sim N(0,36), X_7+X_8+X_9 \sim N(0,6)$$

$$Z_1=\frac{1}{\sqrt{12}}(X_1+X_2+2X_3) \sim N(0,1);$$

$$Z_2=\frac{1}{\sqrt{36}}(X_4+4X_5+X_6) \sim N(0,1); Z_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(X_7+X_8+X_9) \sim N(0,1);$$

$$Z=\frac{1}{12}(X_1+X_2+2X_3)^2+\frac{1}{36}(X_4+4X_5+X_6)^2+\frac{1}{6}(X_7+X_8+X_9)^2 \sim \chi^2(3)$$

$$\therefore a=\frac{1}{12}; b=\frac{1}{36}; c=\frac{1}{6}$$

参数估计

- 矩估计与极大似然估计
- 区间估计（定义与枢轴变量法）
- 正态总体的区间估计（六种）

待估参数		主元	置信区间
μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

一个正态总体

试写出上述情形的单侧置信上限与单侧置信下限。

两个正态总体

$\mu_1 - \mu_2$

σ_1^2,σ_2^2已知时，$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$ $\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知时，$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

$\left(S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)$ $\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ $(\mu_1,\mu_2$未知$)$ $F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$

- 例：设X的密度函数为：

$$p(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} & x\geq\alpha\\ 0 & x<\alpha\end{cases}$$

求α，β的矩估计与极大似然估计。

- **解:** $\text{EX}=\alpha+\beta,\ \text{EX}^2=\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2.$

$\therefore \alpha = EX-\sqrt{DX},\ \beta=\sqrt{DX}.$

$\therefore$ 矩估计为$\hat{\alpha}=\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2},\ \hat{\beta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}.$

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta}e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\alpha\right)/\beta},\ X_i\ge\alpha,\ i=1,\cdots,n.$$

$$\ln L=-\ln\beta-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\alpha\right)\Big/\beta,\ \min_{1\le i\le n}\{X_i\}\ge\alpha.$$

$\therefore$ 极大似然估计为$\hat{\alpha}=\min_{1\le i\le n}\{X_i\},\ \hat{\beta}=\bar{X}-\min_{1\le i\le n}\{X_i\}.$

- 例：设X的密度函数为：

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\theta & 0<x<1\\ 1-\theta & 1\le x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

又$X_1,\ldots,X_n$为样本，N为样本$X_1,\ldots,X_n$中小于1的个数。求θ的矩估计和极大似然估计。

- 解：

$$EX = 3/2 - \theta.$$

$$\therefore 矩估计为\hat{\theta} = 3/2 - \bar{X}.$$

$$L = \theta^N (1-\theta)^{n-N},$$

$$lnL = N\ln\theta - (n-N)\ln(1-\theta).$$

$$\therefore 极大似然估计为\hat{\theta} = \frac{N}{n}.$$

假设检验

- 假设检验的概念与两类错误

- 正态总体的假设检验（六种，自己总结！）

- 例：食用加碘盐对人的健康有利，但盐中含碘过多，则对健康有害，按规定：每包食盐中含碘量不得超过20毫克。现对某厂生产的食盐进行抽查，随机取出16包, 测得每包含碘量的平均值22毫克，样本均方差S=2.5毫克，设每包含碘量X服从正态分布．(1)在显著性水平为0.05下，问该厂生产的食盐含碘量是否合格？(2)求均值的置信度为95%的置信区间 。
- 解：

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{22-20}{2.5/\sqrt{16}}=3.2>t_{0.05}(n-1)=1.75$$

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))=(22-\frac{2.5}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15),22+\frac{2.5}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15))$$

- 例：设 X_1，X_2，X_3 为服从两点分布B(1, p)的样本，假设检验问题：

$$H_0: p=\frac{1}{2} \leftrightarrow H_1: p=\frac{3}{4}.$$

现假设检验的拒绝域为{X_1+X_2+X_3 ≥1}，求该检验的第一类错误与第二类错误。

解：
$$\alpha = P(X_1+X_2+X_3 \geq 1 | H_0) = 7/8$$
$$\beta = P(X_1+X_2+X_3 < 1 | H_1) = 1/64$$